Beschreibungen der Modelle

Geometrikum

http://www.ag.jku.at/geometrikum.shtml

Die meisten Exponate wurden von Mitarbeiter*innen des Instituts und Studierenden hergestellt.

Bitte stellen Sie die Broschüre anderen Besuchern wieder zur Verfügung.

Link zur Online-Broschüre:
http://www.ag.jku.at/GeometrikumBeschreibungenDE.pdf

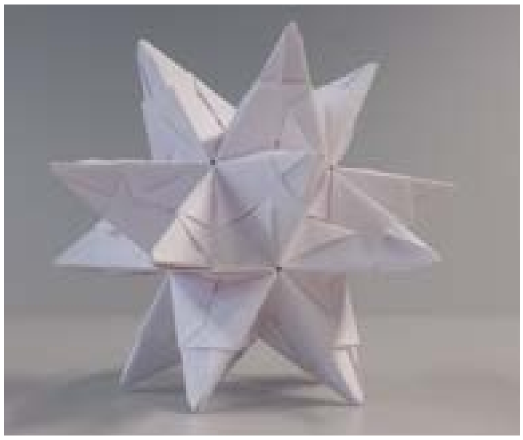
Mai, 2024

Geometrikum

Bascetta-Stern

Beschreibung

Der stachelige Bascetta-Stern ist ein beeindruckendes Exemplar einer kniffligen Origami Struktur, die auch völlig ohne Schere oder Kleber ihre Form mit bemerkenswerter Stabilität beibehält. Der Trick besteht darin, 30 gleich große Papierquadrate auf korrekte Art und Weise ineinanderzuf¨ugen. Erfunden wurde er vom Italienischen Mathemaik-Lehrer Paolo Bascetta.



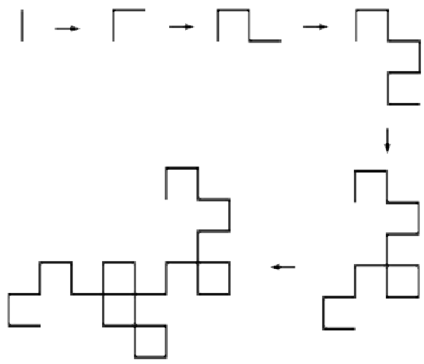
Weitere Eigenschaften

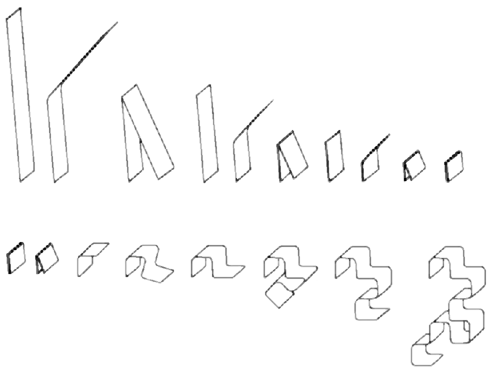
Mathematisch lässt sich der Bascetta-Stern als Ikosaeder, also einem 20-flächigen regelmäßigen Polyeder, mit jeweils einer Pyramide auf jeder der 20 Flächen bezeichnen. Diese Form wird auch Ikosaederstern genannt. Die Struktur des Origami Bascetta-Sterns beruht auf 30 gleichgefaltenen Quadraten. Diese gefaltenen Quadrate werden auch Tornillo-Module genannt. Tornillo kommt vom spanischen und bedeutet Schraube, bezeichnet also das Ineinanderschrauben, das beim Zusammenfügen passiert. Modul bedeutet einfach so viel wie Einzelteil. Besonders interessant an diesen Tornillo-Modulen ist, dass man nicht nur den Ikosaederstern mit ihnen herstellen kann. Jeder Stern, der auf einem der platonischen oder archimedischen Körpern beruht, lässt sich mit ihnen falten. Die Anzahl der benötigten Papierquadrate dafür enstpricht genau der Anzahl an Kanten des dazugehörigen Polyeders.

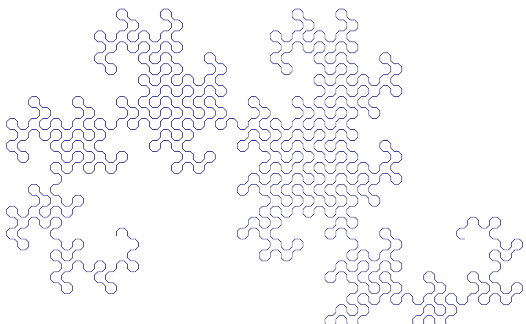
Die Drachenkurve

Beschreibung

Die Drachenkurve ist ein Objekt, welches wie die Koch-Flocke iterativ erzeugt wird.
Das Zeichnen der Kurve geschieht wie bei Turtle-Grafiken: „R“ bedeutet eine 90° Drehung nach rechts, „L“ nach links. Man beginnt mit einer Linie nach oben. Danach wird nach jedem Symbol in der Liste eine Linie in die aktuelle Richtung gezeichnet.
Die Anfangsliste besteht nur aus „R“. In jeder weiteren Iteration wird die vorherige Liste kopiert, ein „R“ zugefügt und erneut eine Kopie der alten Liste angehängt, bei der jedoch die Reihenfolge umgekehrt ist und „R“ und „L“ vertauscht werden.
Eine anschauliche Möglichkeit die n-te Iteration der Kurve zu finden ist, indem ein Papierstreifen n mal in der Hälfte gefaltet wird. Wird der Papierstreifen dann geöffnet und jede Seite in einem 90° Winkel gestellt, bekommt man die n-te Iteration der Drachenkurve.

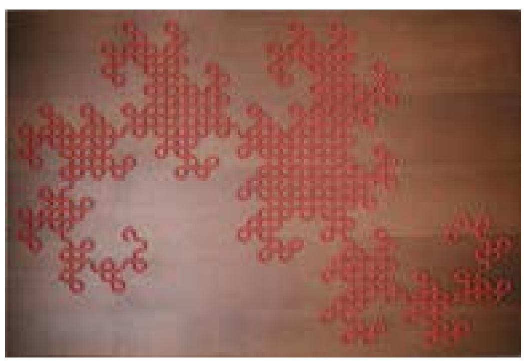






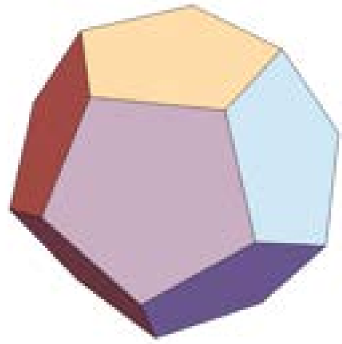
Wichtige Eigenschaften

Die Drachenkurve ist wie die Koch-Flocke eine fraktale Kurve welche selbstähnlich ist. Obwohl sie eine endlich Fläche beansprucht, besitzt sie einen unendlich langen Rand.
Trotz ihres unregelmäßigen Aussehens kreuzt sich die Kurve kein einziges mal selbst. Weiters besitzt die Drachenkurve ein überraschend einfaches Seitenverhältnis von 3:2.
Weiters ist sie ein Objekt, mit welchem die Ebene lückenlos überdeckt werden kann.



Institut für Angewandte Geometrie, Johannes Kepler Universität Linz, Altenberger Str. 69, A-4040 Linz, Österreich
http://www.ag.jku.at/

Dodekaeder aus modularem Origami



Beschreibung

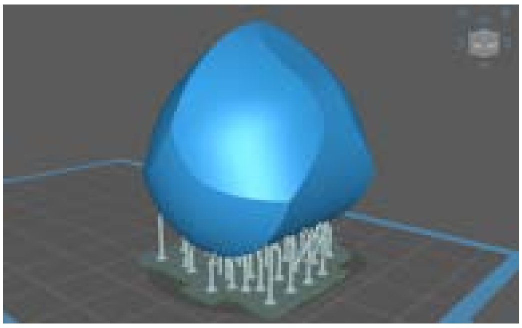
Ein Dodekaeder ist ein 12-seitiges Polyeder. Dodekaeder gibt es in vielen verschiedenen Formen. Eine der bekanntesten Formen ist das regelmäßige Dodekaeder, welches aus zwölf regelmäßigen Fünfecken besteht und zu den Platonischen Körpern gehört. Das regelmäßige Dodekaeder hat 30 Kanten und 20 Ecken. Insgesamt gibt es 6 384 634 topologisch unterschiedliche, konvexe Dodekaeder. Der Dualkörper des Dodekaeders ist das Ikosaeder. Mittels dieser beiden Körper lassen sich zahlreiche andere Körper konstruieren, z.B. das abgestumpfte Ikosaeder (Fußball), welches aus dem Durchschnitt eines Dodekaeders mit einem Ikosaeder gebildet wird.

Origami Modell

Modulares Origami ist eine Papierfalttechnik, bei welcher man zwei oder mehrere Blätter Papier benutzt, um größere und komplexere Strukturen zu bilden.
Das Dodekaeder aus modularem Origami besteht aus 30 Modulen. Jedes dieser Module repräsentiert eine Kante des Dodekaeders und wird mittels sechs Faltschritten gefaltet.
Am Ende jedes Moduls befinden sich jeweils eine Lasche und eine Tasche, welche während des Faltvorgangs entstanden sind. Durch Einstecken einer Lasche in die Tasche eines anderen Moduls, lässt sich so aus drei Modulen eine Ecke des Dodekaeders modellieren. Dadurch lässt sich das Dodekaeder ohne Anwendung von Klebstoff konstruieren.

Gömböc

Beschreibung



Der Gömböc ist ein Körper, mit der besonderen Eigenschaft sich immer wieder auf einen gewissen Punkt zurück rollen zu können, ganz gleich wie er auf den Boden gestellt wird. Er ist vergleichbar mit dem klassischen „Stehaufmännchen", welches sich ebenfalls aus jeder Position immer wieder aufrichtet. Allerdings schafft es dieser nur aufgrund von schweren Gewichten innerhalb des Körpers. Die beiden Mathematiker Peter Várkonyi und Gábor Domokos waren die ersten, die die Frage nach der Existenz eines solchen konvexen Körpers ohne versteckten Gewichten mit ja beantworten und beweisen konnten.

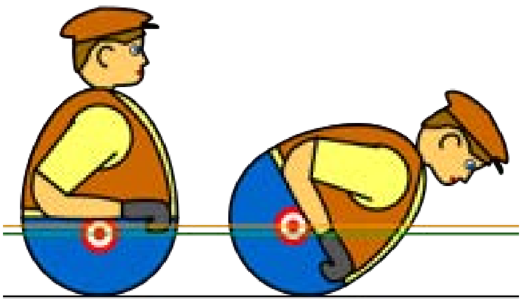
Wichtige Eigenschaften

Zwei herausstechende Eigenschaften des Gömböc's sind die Konvexität und Homogenität der Masse. Man kann zwischen drei Arten von Gleichgewichten unterscheiden, dem stabilen, dem labilen und dem indifferenten. Bei einem stabilen Gleichgewicht, kehrt der Körper nach einer Störung wieder in die zuvorige Lage zurück, bei einem labilen Gleichgewicht wird sich der Körper nach der Auslenkung immer weiter von der vorherigen Lage wegbewegen und bei einem indifferenten Gleichgewicht nimmt der Körper danach eine neue Gleichgewichtslage ein. Der Gömböc besitzt genau zwei Gleichgewichte, ein stabiles und ein labiles. Dies ist deshalb bemerkenswert, da gezeigt werden konnte, dass kein Körper existiert, der weniger als zwei Gleichgewichte besitzt.

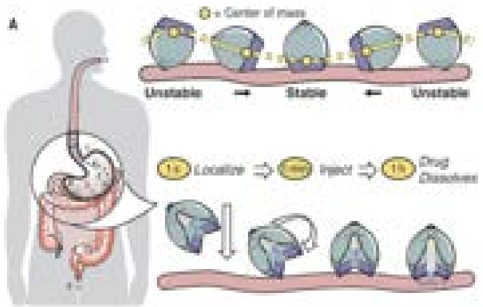
Gömböc

Beschreibung

Der Gömböc ist der erste dreidimensionale, konvexe und homogene Körper mit nur einer stabilen und einer labilen Gewichtslage. Er wurde von den ungarischen Wissenschaftlern Gábor Domokos und Péter Várkonyi entwickelt und konstruiert. Er stabilisiert sich immer wieder in seine stabile Gewichtslage zurück. Solche Körper, die auch besser als "Stehaufmännchen" bekannt sind gibt es aber schon zahlreich. Das besondere am Gömböc ist jedoch, dass er konvex und homogen ist. Das bedeutet insbesondere, dass sein geometrischer Schwerpunkt weder durch unterschiedliche Dichte an verschiedenen Stellen noch durch geschickte Konstruktion mit Hohlräumen manipuliert werden kann.

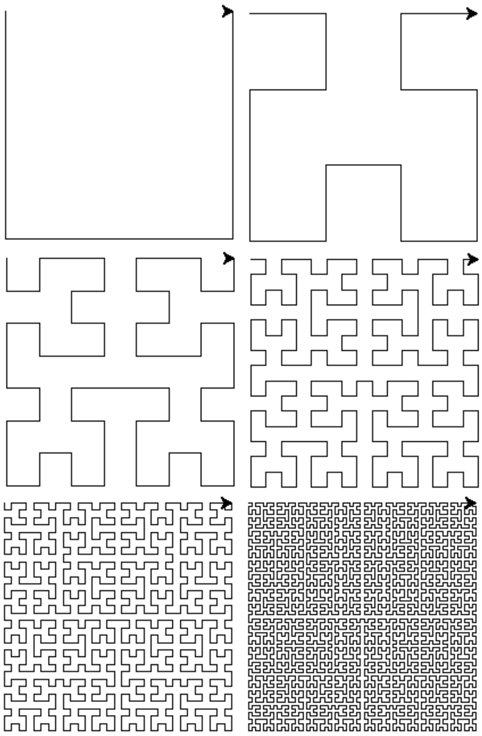


Wissenschaftliche Relevanz



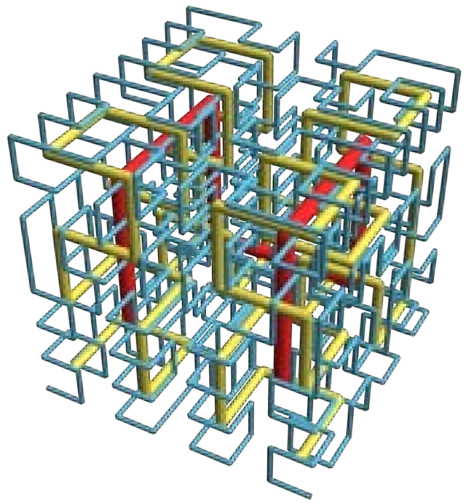
Mal davon abgesehen, dass mit dem Gömböc eine schon lange bestehende mathematische Vermutung bewiesen wurde, hat diese Entdeckung auch praktische Anwendungsfälle. Ein Team von Harvard und dem MIT haben zum Beispiel eine Gömböc inspirierte Kapsel entwickelt, die Insulin in den Magen eines Diabetes Patienten ausschüttet und somit die Notwendigkeit einer Insulinspritze aus der Welt schafft.
Auf die Idee der Form des Gömböcs sind die Entwickler übrigens laut Eigenaussage durch das betrachten verschiedener Schildkrötenarten gekommen, die sich immer wieder auf ihren Bauch drehen konnten.

Hilbert-Kurve



Beschreibung

Die Hilbert-Kurve, von David Hilbert 1891 entdeckt, ist eine stetige Kurve in der Mathematik, die die Fläche eines Quadrats als Grenzkurve von Polygonzügen komplett ausfüllt. Als eine FASS-Kurve (space-**f**illing, self-**a**voiding, **s**imple and self-**s**imilar) ermöglicht sie die raumfüllende Abdeckung eines zweidimensionalen Gebiets mit einer stetigen eindimensionalen Linie. Diese bis auf Spiegelungen und Rotationen einzigartige Kurve, ist die einzige zweidimensionale FASS-Kurve des Quadrats, die an zwei Ecken startet und endet. Die Hilbert-Kurve bietet somit die Möglichkeit, mit einer kontinuierlichen Linie ein gesamtes zweidimensionales Gebiet zu überdecken.



Wichtige Eigenschaften

Die Hilbert-Kurve zeichnet sich durch ihre Konstruktion mittels rekursiver Iteration aus. Bei jedem Schritt wird jedes Gebiet in 2^{d} kongruente Teilgebiete (d-dimensionale Intervalle) mit halber Seitenlänge aufgeteilt, während auf der Eingabeseite ein Intervall in 2^{d} gleich lange Teilintervalle unterteilt wird. Auf diese Weise wandelt das Verfahren 1D-Schachtelungen von Intervallen in 2D-Schachtelungen von Quadraten (oder in 3D-Schachtelungen von Würfeln) um und bewahrt dabei die Inklusion. Im 3-dimensionalen Raum eröffnen sich deutlich vielfältigere Konstruktionsmöglichkeiten,welche durch verschiedene "Traversierungen" charakterisiert werden.

Hyperbolische Ebene

Beschreibung

Eine hyperbolische Ebene gehört zu den Modellräumen der Flächengeometrie. Diese Ebene besitzt eine besondere Eigenschaft: Bewegt man sich von einem Punkt in der hyperbolischen Ebene weg, dann dehnt sich der Raum um diesen Punkt exponentiell aus.
1970 fertigte William Thurston eines der ersten Modelle für eine hyperbolischen Ebene an. Sein Modell bestand aus Papier und war daher sehr instabil. 1997 überarbeitete die Mathematikerin Daina Taimina das Modell von Thurston. Sie wollte es ermöglichen, die Eigenschaften dieser einzigartigen Geometrie zu fühlen. Somit erstellte sie das erste gehäkelte Modell. Gehäkelte hyperbolische Modelle bestehen meist aus Stäbchen, festen Maschen, Luftmaschen und Kettmaschen. Sie werden in Runden gehäckelt, wobei jede n-te Masche verdoppelt wird. Je kleiner n ist, umso gekräuselter wird die hyperbolische Ebene.

Wichtige Eigenschaften

Die hyperbolische Ebene ist definiert als der 2-dimensionale hyperbolische Raum $\mathbb{H}^2$. Eine wichtige Eigenschaft der hyperbolischen Ebene ist die konstate Schnittkrümmung, welche -1 beträgt. Zum Vergeich: Der euklidische Raum besitzt Krümmung 0 und die Sphäre die Krümmung 1. In einer hyperbolischen Ebene kann ein Paar bestehend aus Linien parallel, hyperparallel oder geschnitten sein.

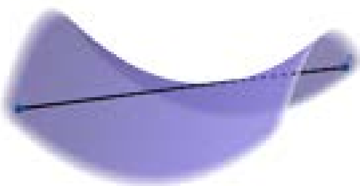
Hyperbolisches Paraboloid

Beschreibung

In der Mathematik wird eine algebraische Fläche zweiter Ordnung als Paraboloid bezeichnet, d.h. die Koordinaten x und y kommen höchstens zur 2. Potenz vor. Solche Flächen werden auch als „Quadrik“ bezeichnet. Einem hyperbolischen Paraboloid liegt die Gleichung $a^2 \cdot x^2 - b^2 \cdot y^2 = z$ zugrunde. Man sollte diesen nicht mit einem Hyperboloid verwechseln. Im Fall $a^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot y^2 = z$ würde man von einem elliptischen Paraboloid sprechen. In der Architektur wird die hyperbolische Paraboloidschale gerne für Dachkonstruktionen verwendet, das erste diesbezügliche Patent wurde 1928 von der russischen Ingenieurin Tatjana M. Markowa angemeldet.

Wichtige Eigenschaften

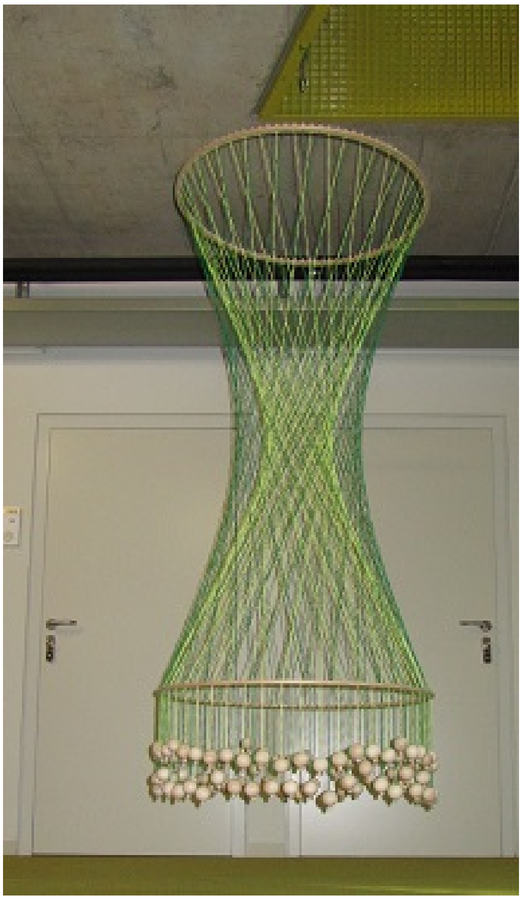
Wegen seines typischen Aussehens wird das hyperbolische Paraboloid oft auch als Sattelfläche bezeichnet, da es in Richtung der zwei Hauptachsen entgegengesetzt gekrümmt ist. Schneidet man das hyperbolische Paraboloid in Richtung dieser zwei Hauptachsen mit Ebenen, erhält man jeweils als Schnittfigur eine Parabel. Daher kommt auch der Name, der im Griechischen so viel bedeutet wie „eine Parabel zeigend“. Beim Schnitt der algebraische Fläche mit einer Ebene der dritten/letzten Raumrichtung erhält man eine Hyperbel als Schnittfigur. Einen Spezialfall sieht man in der letzten Abbildung rechts. Hier ergibt sich durch den Schnitt mit einer Ebene eine Gerade.



Hyperboloid

Beschreibung

Ein Hyperboloid ist eine Fläche, die entsteht, wenn man eine Hyperbel um eine der zwei Hauptachsen rotieren lässt. Ein Hyperboloid wird zum Beispiel durch folgende Gleichung beschrieben: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Es gibt zwei Formen, das ein- und das zweischalige Hyperboloid (zweite bzw. dritte Abbildung rechts). Ersteres ist auch für Architekten und Bauingenieure interessant, ein bekanntes Beispiel ist der Kühlturm eines Atomkraftwerks.



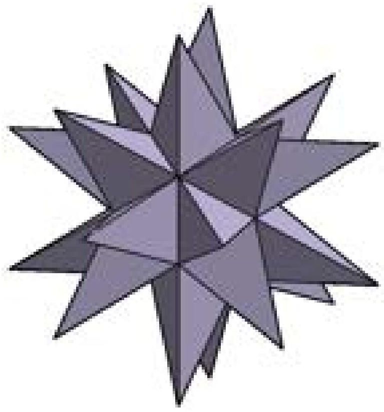
Wichtige Eigenschaften

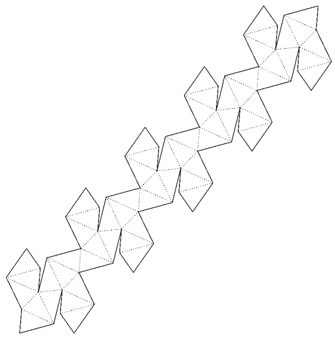
Weiters können das ein- bzw. zweischalige Hyperboloid durch Veränderung der Parameter a, b, c ineinander übergehen. Das einschalige Hyperboloid entsteht durch Setzen der rechten Seite der Gleichung auf $+1$, dies wird auch als hyperbolisches Hyperboloid bezeichnet. Das zweischalige Hyperboloid wiederum erhält man durch Setzen der rechten Seite auf -1, dies wird dann auch als elliptisches Hyperboloid bezeichnet. Dieser Übergang wird im Englischen auch als „Hyperbolid of Revolution“ bezeichnet. Schneidet man das Hyperboloid mit einer horizontalen Ebenen, erhält man einen Kreis. Wird es hingegen mit einer vertikalen Ebene geschnitten, ergibt sich eine Hyperbel. Wie man anhand des Objektes gut erkennen kann, kann das einschalige Hyperboloid aus lauter Geraden geformt werden.

Ikosaederstern

Beschreibung

Der Ikosaederstern repräsentiert zusammen mit dem Dodekaederstern sowie dem großen Dodekaeder und dem großen Ikosaeder einen der vier Kepler-Poinsot-Körper. Als reguläres Polyeder wird er von 12 regelmäßigen Pentagrammen, die 60 gleichschenklige Dreiecke bilden, begrenzt und ist durch die Gleichheit jeglicher Innen- als auch Außenwinkel mit einem Wert von 63,44° charakterisiert.



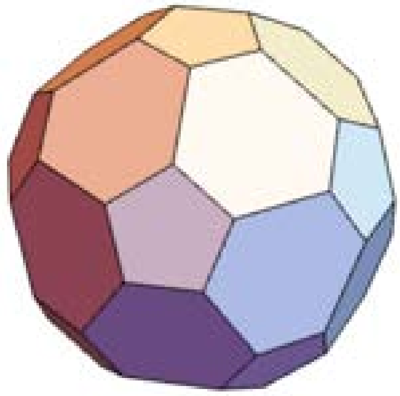


Wichtige Eigenschaften

Die Konstruktion eines Ikosaedersterns kann durch Verlängerung sämtlicher Kanten eines Ikosaeders über die Ecken hinaus erfolgen, bis sich jeweils drei von ihnen in einem Punkt schneiden. Demzufolge kann der Ikosaederstern als Ikosaeder mit 20 aufgesetzten Pyramiden aufgefasst werden, deren Spitzen jeweils den Zacken des Sterns und zeitgleich den Eckpunkten eines regelmäßigen Dodekaeders mit gleichem Oberflächeninhalt, aber größerem Hohlvolumen entsprechen. Alternativ kann der Ikosaederstern auch als umschriebener Körper von 12 sich gegenseitig schneidenden Pentagrammen, die koinzident zu den pentagonalen Schnittflächen des Ikosaeders sind, verstanden werden.

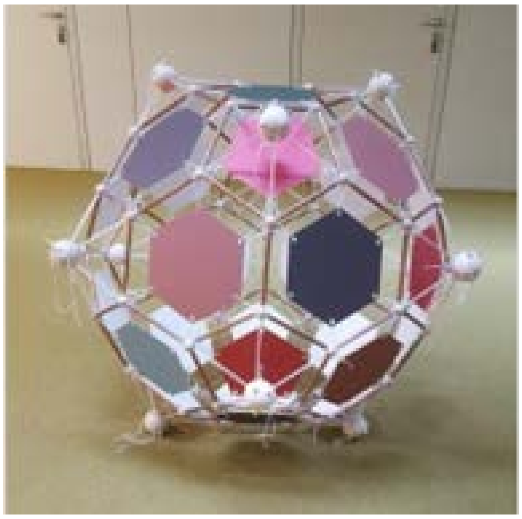
Nebenstehende Abbildungen zeigen die Geometrie und das Netz eines Ikosaedersterns sowie das mittels Photovoltaik beleuchtbare Transparentpapiermodell eines solchen im ein- und ausgeschalteten Zustand, gefertigt im Rahmen des Geometrikums von Hannah Maria Weiss im Wintersemester 2022/23.

Ikosaederstumpf



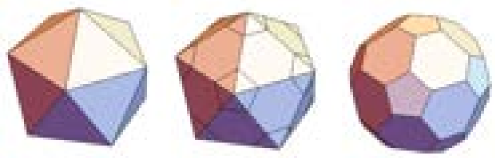
Beschreibung

Der Ikosaederstumpf ist einer der fünf platonischen Körper, genauer gesagt ist der Isokaederstumpf ein Polyeder und zählt zu den archimedischen Körpern. Das Wort Isokaeder stammt vom Griechischen $\epsilon\iota\kappa\o\sigma\acute{\alpha}\epsilon\delta\rho\o\nu$ eikosáedron und bedeutet Zwanzigflächer. Ein Ikosaeder besteht aus 20 gleich großen gleichseitigen Dreiecken, die zusammen 12 Ecken bilden. Der Ikosaederstumpf entsteht durch Abstumpfung der Ecken eines Ikosaeders. Wenn alle Kanten des Ikosaederstumpfes gleich lang sind, wird von einem regelmäßigen Ikosaederstumpf gesprochen. Die Form des regelmäßigen Ikosaederstumpfes erinnert stark an einem Fußball, daher wird dieser häufig auch als Fußballkörper bezeichnet. Ein weiteres Beispiel für einen Ikosaederstumpf ist das Fullerenmolekül C_{60}.



Wichtige Eigenschaften

Wie oben erwähnt besteht ein Ikosaeder aus 20 gleich großen gleichseitigen Dreiecken, die zusammen 12 Ecken bilden. Durch das Abstumpfen der 12 Ecken erhält man 12 regelmäßige Fünfecke und die ursprünglichen 20 gleichseitigen Dreiecke werden zu regelmäßigen Sechsecken. Der Ikosaederstumpf besteht somit aus insgesamt 32 Flächen, 60 Ecken und 90 Kanten. Der regelmäßige Ikosaederstumpf besitzt ebenfalls 90 Kanten, jedoch sind diese gleich lang. Der zum Ikosaederstumpf duale Körper ist der Pentakisdodekaeder.



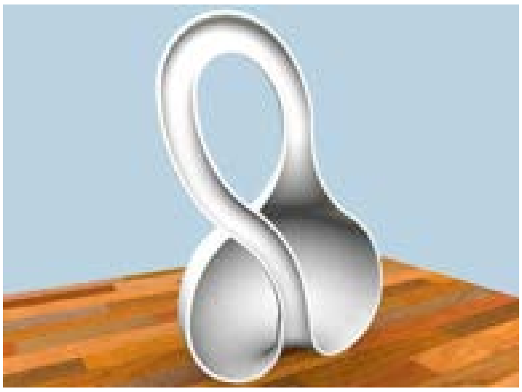
Klein’sche Flasche

Beschreibung

Die Klein’sche Flasche ist ein beeindruckendes geometrisches Objekt und wurde erstmals 1882 vom deutschen Mathematiker Felix Klein (1848–1925) beschrieben.
Sie entsteht durch das Verbinden zweier Möbiusbänder.

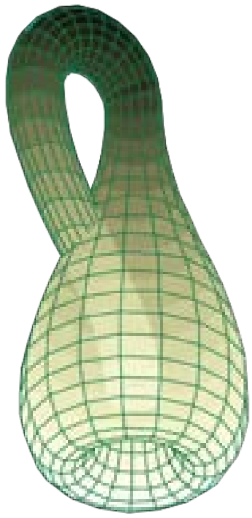
Wichtige Eigenschaften

Die Kleinsche Flasche bezeichnet eine nicht-orientierbare, zweidimensionale und differenzierbare Mannigfaltigkeit. Nicht-orientierbar bedeutet im mathematischen Sinn, dass es hier keine ausgezeichnete Innen- oder Außenseite gibt. Es ist also nicht möglich, Inneres und Äußeres zu unterscheiden oder einen stetigen Normalenvektor zu definieren.
Im Gegensatz zum Möbiusband hat Klein’sche Flasche keinen Rand. Da die Fläche keine Orientierung und somit auch kein Inneres hat, besitzt sie aus Sicht der Mathematik auch kein Volumen. Es gibt noch weitere Variationen der Klein’schen Flasche, wie z. B. die Doppel- und Tripelflasche mit zwei bzw. drei Selbstdurchschneidungen.



Kleinsche Flasche

Beschreibung



Die Kleinsche Flasche, welche nach dem Mathematiker Felix Klein benannt wurde, ist ein geometrisches Objekt, welches nur aus einer Seite besteht. Dies bedeutet, dass man innen und außen nicht unterschieden kann. Es ist somit möglich, von dem vermeintlich Inneren auf das Äußere überzugehen, ohne eine Kante zu kreuzen. Vergleichbar ist in dieser Hinsicht die Kleinsche Flasche mit dem Möbiusband, welches nur eine Seite und einen Rand hat. Die Konstruktion einer Kleinschen Flasche ist möglich mithilfe eines Quadrates, das zu einer Röhre zusammengeklappt wird. Es werden anschließend die Enden verbunden, sodass die Röhre sich selbst durchdringt. Eine weitere Möglichkeit ist, zwei gespiegelte Möbiusbänder zusammenzufügen. Diese Methode wurde für die rechts abgebildete gehäkelte Kleinsche Flasche verwendet. Dabei werden mithilfe des eingenähten Reißverschlusses die Möbiusbänder verbunden.

Wichtige Eigenschaften

Die Kleinsche Flasche hat kein Volumen und im Gegensatz zum Möbiusband auch keinen Rand. Ein weiterer Unterschied zum Möbiusband ist, dass sie nicht in den dreidimensionalen Raum eingebettet werden kann. Die dreidimensionale Kleinsche Flasche ist lediglich eine Möglichkeit zur Veranschaulichung dieses Objekts. Wird die Kleinsche Flasche in den vierdimensionalen Raum eingebettet, so kann die fälschliche Selbstdurchdringung vermieden werden.

Lorenz Mannigfaltigkeit

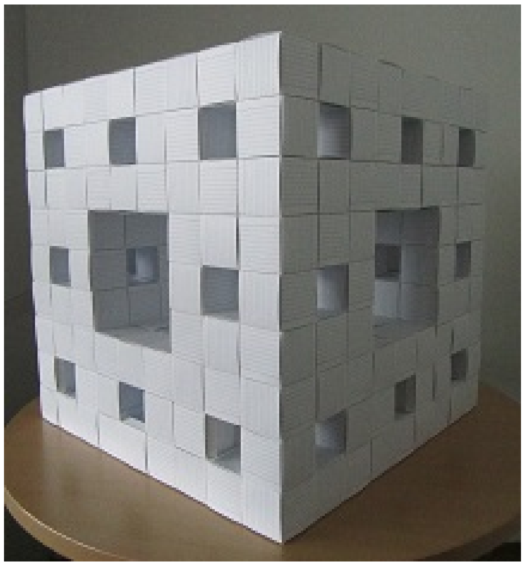
Beschreibung

Die Wettervorhersage ist eine nicht exakte Wissenschaft. Insbesondere die Muster/Formen von Wolken und deren Auswirkungen sind ein Mysterium. Einer der ersten Wissenschaftler der sich an die Rätsel des Wetters wagte, war der Meteorologe Edward Lorenz. 1963 arbeitete Lorenz an einer Berechnung zur Wettervorhersage, genauer gesagt entwickelte er ein vereinfachtes mathematisches Modell für die atmospärische Konvektion. Aus diesen Berechungen erhielt er den Lorenz Attraktor, aus welchem sich erst später (2002) die Lorenz Mannigfaltigkeit ergab. 2002 stellte die Mathematikerin Hinke Osinga fest, dass das Computermodell der Lorenz Mannigfaltigkeit aussieht, wie eine Häkelschrift. Osinga zögerte nicht lange und häkelte die erste Lorenz Mannigfaltigkeit. Ihr Modell besteht aus 47 Reihen und 21.989 Maschen. Das Modell des Geometrikums besteht, wie das Originalmodell, aus 47 Reihen und 21.989 Maschen. Für die Anfertigung wurde über 1 km Garn verhäkelt.

Wichtige Eigenschaften

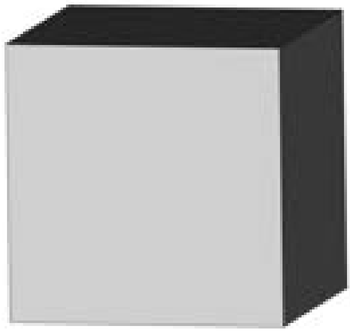
Der Lorenz Attraktor ist eine unendlich lange Trajektorie im dreidimensionalen Raum, die sich nie selbst schneidet. Osinga und Krauskopf betrachteten das Lorenz System in einer neuen zeitunabhängigen Weise und erhielten die Lorenz Mannigfaltigkeit. Die Lorenz Mannigfaltigkeit ist eine Fläche bestehend aus allen Punkten im Raum, die nicht in der atmospärischen Konvektion verbleiben.

Menger-Schwamm



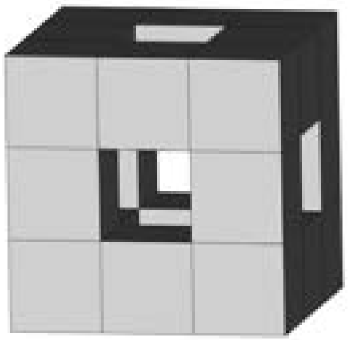
Beschreibung

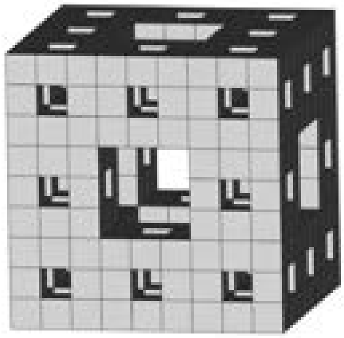
Der Menger-Schwamm wurde erstmals im Jahre 1926 von dem österreichischen Mathematiker Karl Menger in einer Arbeit über die Dimensionalität von Punktemengen erwähnt. Der Schwamm gehört zur Gruppe der Fraktale, jener Objekte, die sich aus mehreren zudem eine zweidimensionale Darstellung des Menger-Schwammes möglich, in diesem Fall spricht man dann von einem sogenannten Sierpinski-Teppich.



Wichtige Eigenschaften

Um einen Menger-Schwamm zu erzeugen, bietet sich ein iteratives Vorgehen an. Dabei wird der Würfel (bzw. jeder seiner Teilwürfel) in $27 = 3 * 3 * 3$ kleinere Würfel zerlegt, von welchen anschließend 7 Stück entfernt werden. Die zu entfernenden Teilwürfel liegen dabei nicht am Rand sondern im Zentrum bzw. in den Facettenmitten. Wird dieses Vorgehen unendlich oft wiederholt, führt dies zu einer Aushöhlung des Schwammes und man erhält einen Menger-Schwamm. Dabei konvergiert die Oberfläche gegen unendlich, während das Volumen gegen null geht. Die Dimension des Würfels kann man nicht als natürliche Zahl angeben, stattdessen besitzt er eine krumme (fraktale) Dimension, welche zwischen einer zweidimensionalen Fläche und einem dreidimensionalen Würfel liegt. Der genaue Wert ist gegeben durch $dim = \frac{\log(20)}{\log(3)} = 2.726833..$.
Das obige Foto zeigt beispielsweise einen aus 400 kleinen Papierwürfel zusammengesetzten Menger-Schwamm.





JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

Möbiusband

Beschreibung

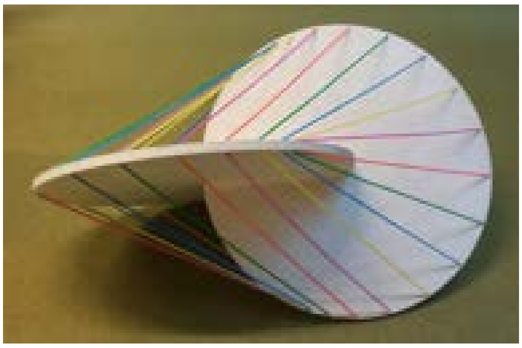
Als Möbiusband (auch Möbiusschleife genannt) wird eine Fläche bezeichnet, welche nur eine Kante und eine Seite hat. Erstmals wurde dieses Objekt im Jahr 1858 mathematisch entdeckt. Unabhängig voneinander beschrieben Johann Benedict Listing und August Ferdinand Möbius diese Fläche.
Das Möbiusband zählt zu den nicht orientierbaren Flächen, das bedeuted es kann nicht zwischen innen und außen bzw. oben und unten unterschieden werden. Zur Veranschaulichung können einfach die beiden Enden eines Papierstreifens verklebt werden, allerding erst nachdem eine halbe Drehung eingebaut wurde.

Wichtige Eigenschaften

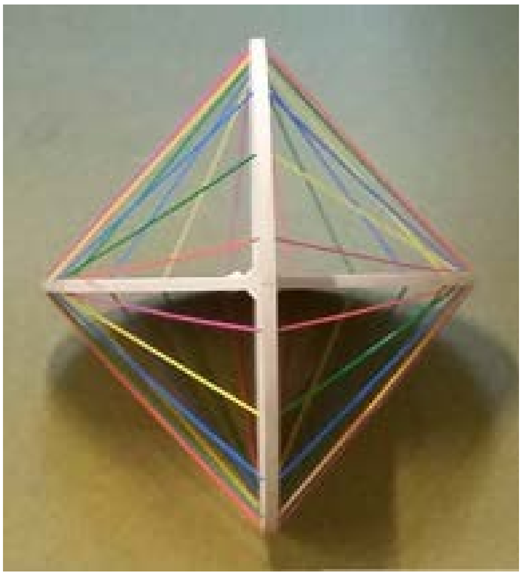
Das Möbiusband taucht in versteckter Form auch in vielen anderen nicht-orientierbaren Flächen auf. Lassen sich die Innen- und Außenseite einer Fläche nicht mehr unterscheiden, so gibt es auf der Fläche einen geschlossenen Möbiusstreifen.
Die Mittellinie eines Möbiusbandes kann keinen Kreis einnehmen, außer das Band wird an einer Stelle gedehnt. Wird das Band entlang der Mittellinie durchtrennt, entsteht ein einziges doppelt ineinander verdrilltes Band (kein Möbiusband mehr). Wenn das Band gedrittelt wird formen die beiden äußeren Streifen wieder ein doppelt ineinander verdrehtes Band und das mittlere Band ergibt ein neues darin hängendes Möbiusband.

Oloid

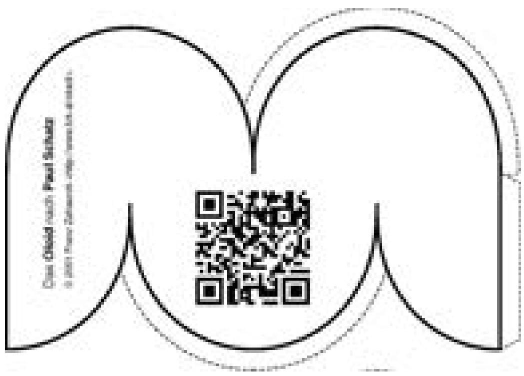
Beschreibung



Das Oloid ist ein geometrischer Körper mit außergewöhnlichen Eigenschaften. Entdeckt wurde es 1929 von Paul Schatz gemeinsam mit dem umstülpbaren Würfel. Es besitzt keine Ecken und nur zwei Kanten. Konstruiert wird es als Hülle von zwei Kreisen mit gleichem Radius, welche im rechten Winkel aufeinander stehen. Der Mittelpunkt des ersten Kreises liegt auf dem zweiten Kreis und umgekehrt (siehe erstes Bild auf der rechten Seite). Rollt das Oloid eine schräge Fläche hinab, so berührt jeder Punkt seiner Oberfläche zu irgendeinem Zeitpunkt eben diese schräge Fläche. Das bedeutet die Oberfläche ist eine abwickelbare Fläche und lasst sich leicht als Netz in der Ebene darstellen, sprich man kann es leicht aus einem Blatt Papier basteln (siehe drittes Bild auf der rechten Seite).

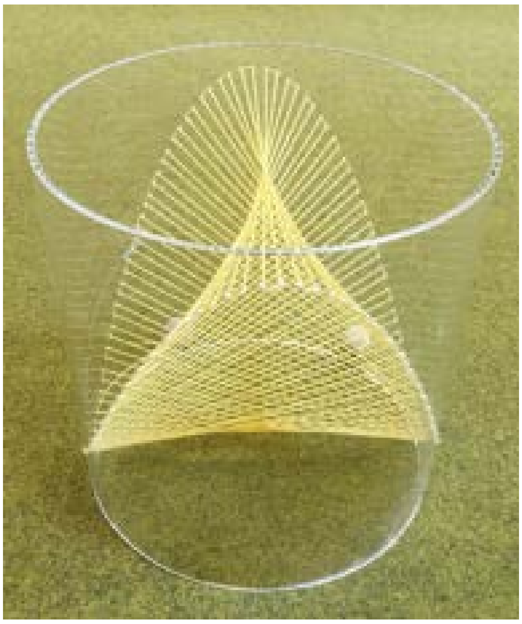


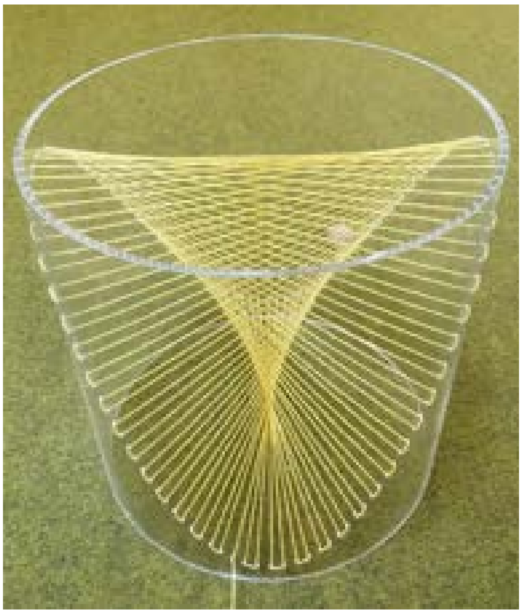
Weitere Eigenschaften



Beobachtet man die Diagonalen des umstülpbaren Würfels bei einer vollständigen Umdrehung, so beschreiben diese die Oberfläche des Oloids. Weiters findet das Oloid in der Technik als Rührgerät zum Rühren, Umwälzen oder Belüften Verwendung. Außerdem ist die Oberfläche des Oloids genau so groß wie die der Kugel mit dem gleichen Radius wie der erzeugenden Kreise.

Plücker-Konoid





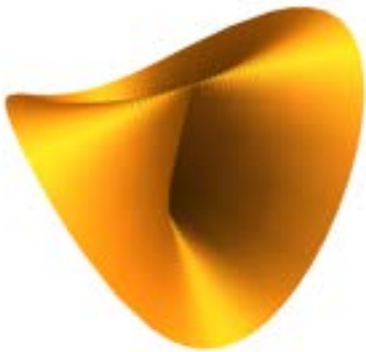
Beschreibung

Das Plücker-Konoid, benannt nach dem deutschen Mathematiker Julius Plücker, ist eine *Regelfläche*. Solche Flächen haben die Eigenschaft, dass für jeden Punkt der Fläche eine Gerade existiert, welche jenen Punkt enthält und außerdem ganz in der Fläche enthalten ist. Diese Geraden werden als *Erzeugende* bezeichnet.
Ein Konoid erfüllt außerdem noch zwei weitere Eigenschaften:

- Es existiert eine sogenannte *Richtebene*, welche zu allen Erzeugenden der Fläche parallel ist.
- Es existiert eine Gerade, die von jeder Erzeugenden geschnitten wird. Diese feste Gerade wird als *Achse* bezeichnet.

Das Plücker-Konoid entsteht, wenn eine Gerade um eine zu ihr orthogonale Achse rotiert und sich gleichzeitig harmonisch auf und ab bewegt. Aufgrund der Orthogonalität von Richtebene und Achse zählt dieses Objekt zu den *geraden Konoiden*.

Wichtige Eigenschaften

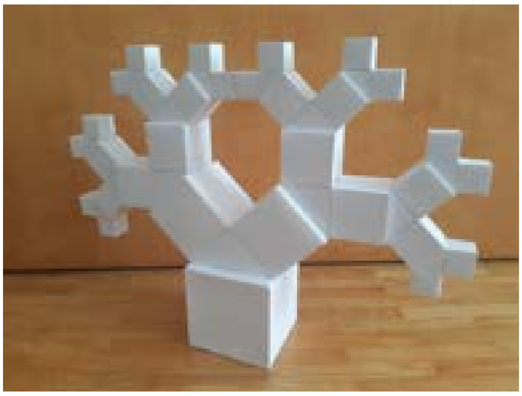


Da alle Punkte der Achse singulär sind und dennoch die implizite Darstellung der Fläche erfüllen, existieren hier keine Tangentialebenen.
In der Architektur sind Regelflächen aufgrund der vergleichsweise einfachen Konstruktion sehr beliebt. Insbesondere gerade Konoide sind leicht herzustellen.

Pythagoras-Baum

Beschreibung

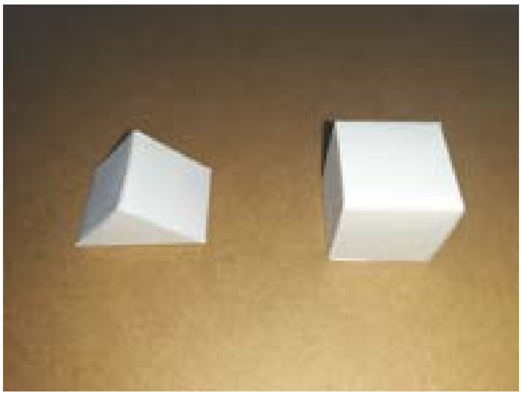
Der Pythagoras-Baum ist ein rekursiv erzeugtes Fraktal, das erstmals 1942 vom niederländischen Mathematiklehrer Albert E. Bosman beschrieben wurde. Die Konstruktion basiert auf dem Satz des Pythagoras: Beginnend mit einem Quadrat als Stamm, werden darauf zwei kleinere Quadrate im rechten Winkel zueinander angeordnet. Dieses Verfahren wird rekursiv auf die nachfolgenden Quadrate angewandt. Nach einigen Durchläufen erhält man dann ein Konstrukt, das einem Baum ähnelt.

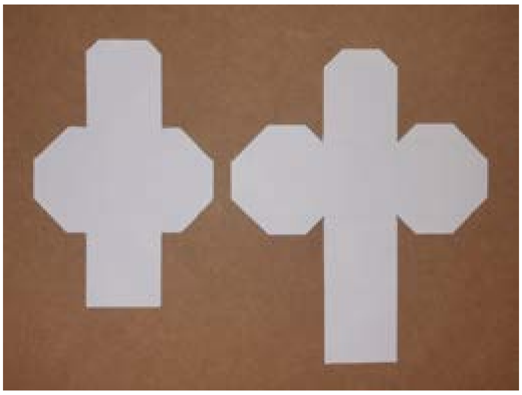


Wichtige Eigenschaften

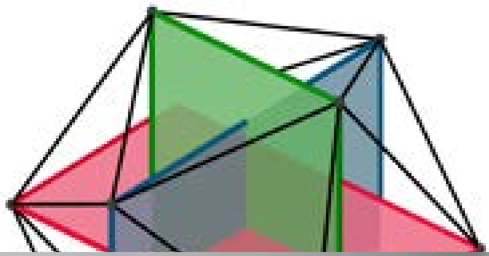
Bei einem symmetrischen Pythagoras-Baum schließen die beiden oberen Quadrate das untere jeweils im $45°$-Winkel ein und umgeben somit ein gleichschenkeliges Dreieck. Beträgt die Seitenlänge des Stamms a, so besitzen die Quadrate im i-ten Schritt eine Seitenlänge von $(\frac{1}{\sqrt{2}})^i \cdot a$. Die Höhe des Baums konvergiert gegen $h = 2 \cdot a \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = 4 \cdot a$. Die Breite konvergiert dann gegen $b = \frac{4 \cdot a}{2} + \frac{4 \cdot a}{2} + a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 6 \cdot a$. Selbstverständlich müssen die von den Quadraten eingeschlossenen Dreiecke nicht gleichschenkelig sein. In diesem Fall entsteht ein asymmetrischer Baum, dessen Höhe und Breite wiederum beschränkt ist.

Die Bilder rechts zeigen die Anfertigung einer dreidimensionalen Variation eines symmetrischen Pythagoras-Baumes. Hierfür wurden Würfel und (zur Stütze) dreiseitige Prismen aus Papier zueinander angeordnet.



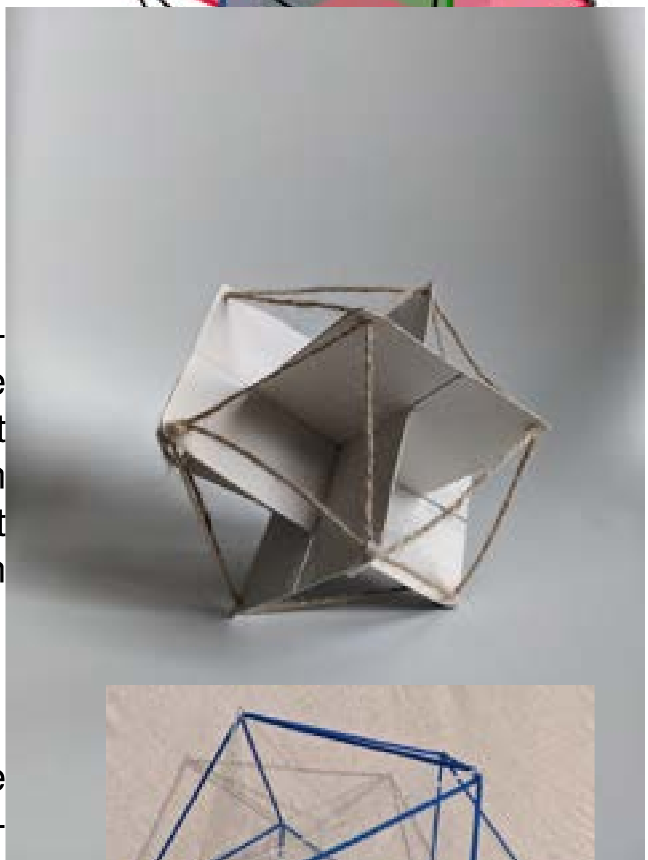


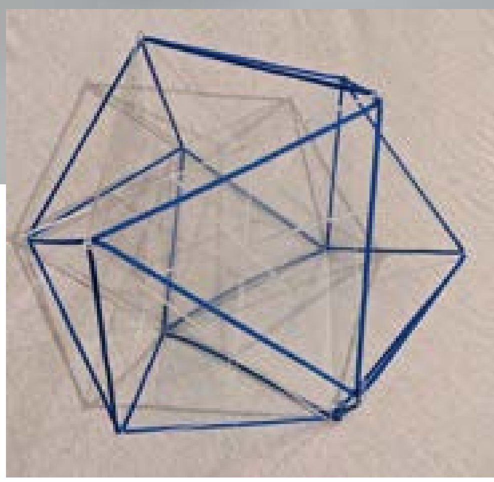
Rechtecke im Ikosaeder



Beschreibung

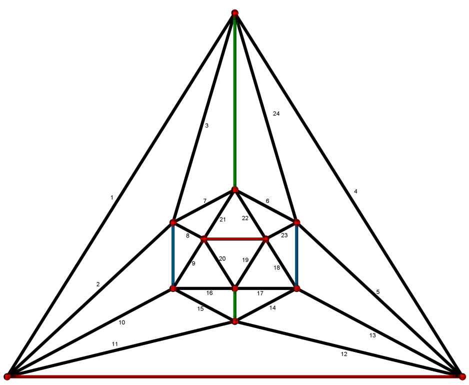
Das Modell zeigt einen durch drei goldene Rechtecke aufgespannten Ikosaeder.Ein Rechteck heißt *goldenes Rechteck*, wenn es aus einem Quadrat und einem Rechteck zusammengesetzt ist, sodass das große Rechteck zu dem kleineren ähnlich ist. Das Seitenverhältnis eines goldenen Rechtecks entspricht genau dem Goldenen Schnitt.
Werden nun drei goldene Rechtecke wie abgebildet ineinander geschoben, sodass sie den gleichen Mittelpunkt haben, so entsteht durch Verbinden benachbarter Ecken ein Körper mit 20 Seitenflächen. Dieser heißt Ikosaeder und gehört zu den platonischen Körpern.





Wichtige Eigenschaften

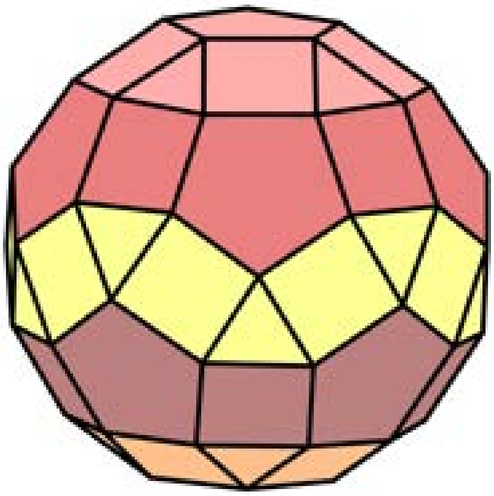
Ein Ikosaeder hat 12 Ecken, 20 gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen und 30 gleich lange Kanten. Die Eckpunkte des Ikosaeder ergeben sich genau aus denen der Rechtecke. Wird der oben abgebildete Ikosaeder in einem Schlegeldiagramm mit farbigen Linien für die Kanten der Rechtecke betrachtet, so ergibt sich nebenstehende Abbildung. An Dieser ist nun leicht zu erkennen, dass alle Eckpunkte einen geraden Grad haben, wenn die farbigen Kanten außer Acht gelassen werden. Es existiert also ein Eulerzug für den Graphen, d.h. ein Zyklus der alle Kanten genau einmal enthält. Ein solcher Eulerzug ist auch in dem Diagramm angegeben und wurde für das Verbinden der Ecken im Modell verwendet.



Rhombenikosidodekaeder

Beschreibung

Der Rhombenikosidodekaeder ist einer von insgesamt 13 (ohne Ähnlichkeitsunterschiedung, ansonsten 15) archimedischen Körpern welche vermutlich im 3. Jahrhundert v. Chr. von dem Mathematiker Archimedes entdeckt wurden. Der Rhombenikosidodekaeder erhält seinen Namen durch die Deckungsgleichheit der Quadrate mit den Rhomben eines Rhombentriakontaeders. Insgesamt besteht der Körper aus 20 gleichseitigen Dreiecken, 30 Quadraten, 12 regelmäßigen Fünfecken und 120 Kanten, wobei jeweils 10 Kanten ein regelmäßiges Dekagon bilden. Mithilfe der Außenkugel und Tangetialebenen ergibt sich der Deltoidalhexakontaeder als dualer Körper.



Wichtige Eigenschaften

Zur Konstruierung des Polyeders werden die Ecken eines Ikosaeders, alternativ die des Dualkörpers, abgestumpft. An den Kanten des Ikosaeders entstehen anschließend die Quadrate und bei jeweils 5 aufeinandertreffenden Dreiecken die Fünfecke.

Alle archimedischen Körper erfüllen die Formel $(2\pi - \sigma) * E = 4\pi$ wobei σ die Summe aller Winkel und E die Anzahl der Ecken beschreibt. Alle Polyeder sind konvexe Körper, dadurch ist die Gültigkeit der Eulerschen Polyederformel gegeben. Wie auch die platonischen Körper besitzen alle archimedischen Körper die Uniformität der Ecken.

Der abgebildete Rhombenikosidodekaeder wurde im Zuge des Seminars Geometrie anhand von Sperrholzplatten dargestellt.

Rhombenkuboktaeder

Beschreibung

Ein Rhombenkuboktaeder besteht aus 18 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken. Mit dem Zentrum im Ursprung und den 11 Permutationen der Koordinaten
(± 1, ± 1, $\pm(1 + \sqrt{2})$) als Eckpunkten, besitzt der Rhombenkuboktaeder Kantenlänge 2. Der Rhombenkuboktaeder kann in zwei quadratische Kuppeln und ein achteckiges Prisma geteilt werden. Der Namen beruht auf dem Fakt, dass 12 der 18 Quadrate deckungsgleich mit den Rhomben eines Rhombendodekaeders sind.

Wichtige Eigenschaften

Der regelmäßige Polyeder ist weder platonischer Körper noch Prisma noch Antiprisma, weshalb er mit der Eigenschaft der Uniformität der Ecken ein Archimedischer Körper ist. Der Polyeder kann durch Abschneiden der 12 Kanten eines Würfels, sodass quadratische Schnittflächen entstehen, gewonnen werden. Jedes der Dreieck ist von 4 Quadraten, und jedes Quadrat entweder von 4 weiteren Quadraten oder 2 Quadraten und 2 Rechtecken umgeben.

Die Richtungen in die ein Zauberwürfel gedreht werden kann, projiziert auf eine Kugel, ähneln den Kanten des Rhombenkuboktaeders. Der Polyeder findet ebenfalls Verwendung in der Raumfüllung bzw. Parkettierung des dreidimensionalen Raumes.

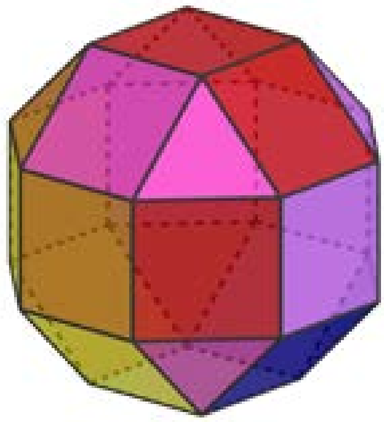


Abbildung 1: Rhombenkuboktaeder

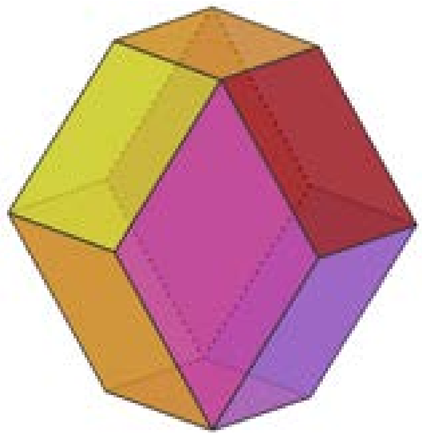


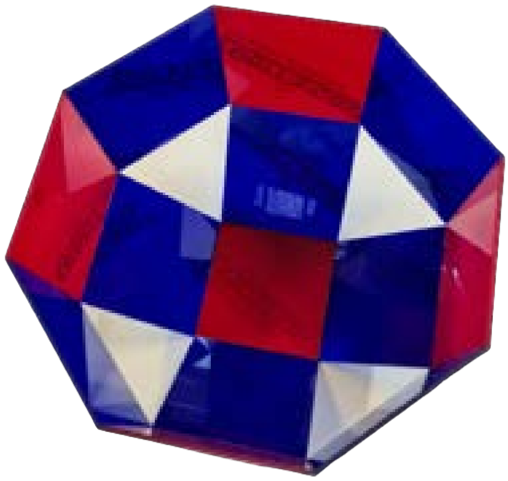
Abbildung 2: Rhombendodekaeder

Abbildung 3: Modell

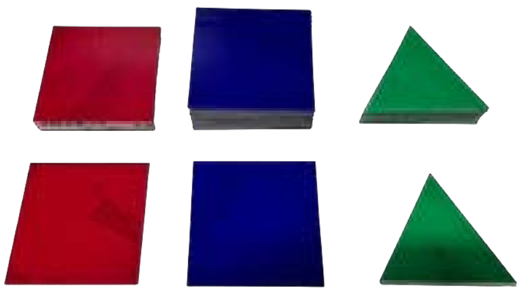
Rhombenkuboktaeder aus Acrylglas

Beschreibung

Das Rhombenkuboktaeder ist ein konvexes Polyeder. Es besteht aus 18 Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken, wobei die Seiten der Quadrate und der Dreiecke gleich lang sind.
Bei diesem angefertigten Objekt betragen die Seitenlängen der Quadrate 118 mm. Daraus ergibt sich für das Rhombenkuboktaeder eine Gesamthöhe von 285 mm.
Der Flächenwinkel zwischen zwei Quadraten beträgt 135° und zwischen Quadrat und Dreieck 144,7°. Daher wurden vor dem Zusammenbau die Kanten der einzelnen Acrylgläser auf Gehrung geschnitten. Die Farben der jeweiligen Flächen kommen dabei zum Tragen. Die Dreiecke sind grün. Die sechs Quadrate, die nur an Quadrate grenzen sind rot und die verbleibenden zwölf Quadrate sind blau.



Beim Bau des Objekts wurde zuerst der „innere Ring“ aus acht Quadraten – abwechselnd blau und rot – zusammengeklebt. Anschließend wurden die restlichen Quadrate oberhalb und unterhalb des Rings angebracht. Zum Schluss wurden die Dreiecke angeklebt. Als Klebemittel wurde spezieller Kunststoffkleber verwendet.



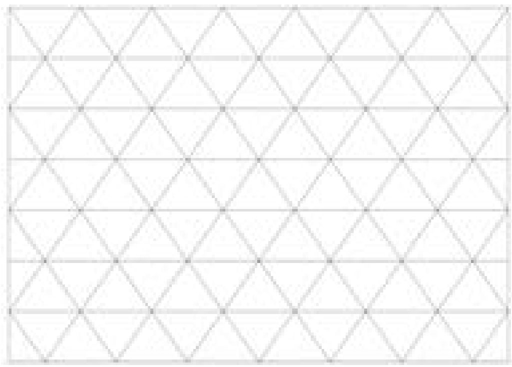
Wichtige Eigenschaften

Das Rhombenkuboktaeder gehört zu den archimedischen Körpern. Es besitzt 48 Kanten und 24 Ecken.
Der duale Körper zum Rhombenkuboktaeder ist das Deltoidalikositetraeder.

Schwarz'sche Laterne

Beschreibung

Die nach dem Mathematiker Hermann Amandus Schwarz benannte "Schwarz'sche Laterne" entsteht durch Triangulierung eines Kreiszylinders. Ein Zylinder wird in k gleich hohe Scheiben mit der Höhe $\frac{H}{k}$ zerlegt, wobei H die Gesamthöhe des Zylinders bezeichnet. Die Kreisfläche jeder Scheibe wird mit einem regelmäßigen n-Eck angenähert, wobei die regelmäßigen Vielecke verdreht zueinander stehen. Die Eckpunkte der n-Ecke werden mit Dreiecken verbunden.
Die "Schwarz'sche Laterne" lässt sich durch bestimmte Faltkonstruktionen aus einem Papier modellieren.



Wichtige Eigenschaften

Das besondere an der "Schwarz'schen Laterne" ist ihre Mantelfläche. Abhängig von der Parameterwahl für n und k, konvergiert diese gegen die Mantelfläche des Zylinders oder kann jede beliebige Größe annehmen.
Sowohl für $n \to \infty$ als auch für $n \to \infty$ und $k \to \infty$, wobei k langsamer wächst als n^2, schmiegt sich die Mantelfläche der "Schwarz'schen Laterne" an den Zylinder an.
Im Gegensatz dazu, divergiert die Mantelfläche für $k \to \infty$ gegen unendlich. Die "Schwarz'sche Laterne" gehört demnach zu der Gruppe der Körper mit endlichem Volumen, aber unendlicher Mantelfäche.

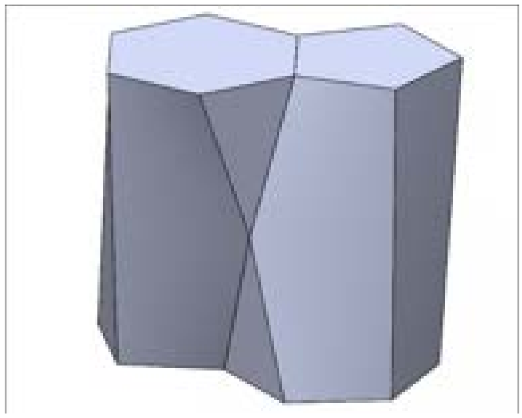
Institut für Angewandte Geometrie

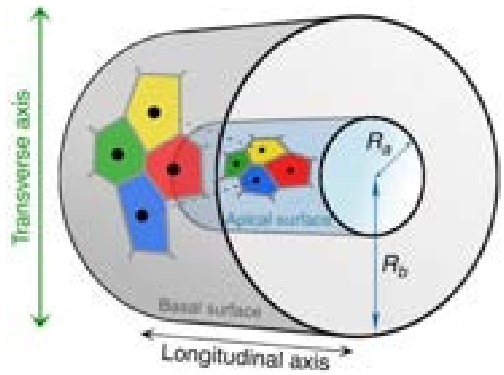
Geometrikum

Scutoid

Beschreibung

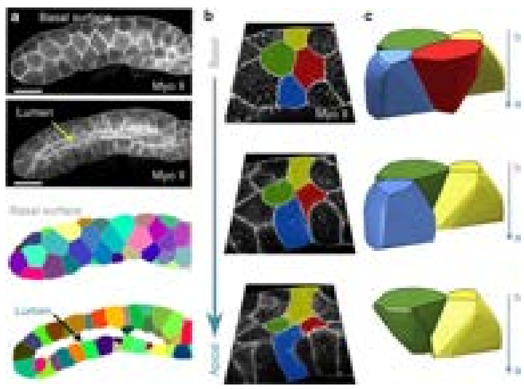
Scutoide weisen zwei Grundflächen mit verschieden vielen Kanten sowie mindestens einen weiteren Eckpunkt, der zu keiner der Grundflächen zählt, auf. Dadurch besitzen sie im Allgemeinen gekrümmte Seitenflächen. Insbesondere interessant ist hierbei die Tatsache, dass man dennoch Scutoide konstruieren kann, die zueinander dicht packend sind (d.h. aneinander gefügt ergibt sich zwischen ihren gekrümmten Außenseiten kein Hohlraum). Ebenfalls besonders ist hierbei, dass sich die Nachbarschaftsbeziehungen der Grundflächen von der oberen zur unteren durch den dazwischen liegenden Eckpunkt verändern.





Bedeutung in der Natur

Entdeckt wurden Scutoide erst 2018 von einer spanischen Forschergruppe aus Zellbiologen und Mathematikern, bei dem Versuch Zellstrukturen zu modellieren. Dabei untersuchten sie, wie sich Zellen in gekrümmten Epithelgeweben verhalten, und bemerkten, dass sich ihre Nachbarn ändern können. Dies war allerdings mit Prismen oder Prismatoiden als Zellformen nicht erklärbar. Erst Scutoide machten dieses Verhalten modellierbar und die Autoren schließen dadurch, dass Scutoide maßgeblich gekrümmtes Epithelgewebe ermöglichen. Tatsächlich wiesen die Autoren auch in der Natur vorkommende scutoidformige Zellen nach.



Bildquelle:
Gómez-Gálvez, P., Vicente-Munuera, P. et al.
Scutoids are a geometrical solution to three-dimensional packing of epithelia.
Nat Commun 9, 2960 (2018).
https://doi.org/10.1038/s41467-018-05376-1

Seifert Fläche von Borromäischen Ringen

Beschreibung

Die Borromäischen Ringe sind eine Verschlingung von drei geschlossenen Kurven, welche nur trennbar sind, wenn man einen der Ringe entfernt (Brunnsche Verschlingung). Eine Seifert-Fäche ist eine orientierte Fläche, welche von einem Knoten oder einer Verschlingung eingegrenzt wird. Martin Gardner zeigte die Seifert Fläche von Borromäischen Ringen erstmals in seiner Kolumne 1961.

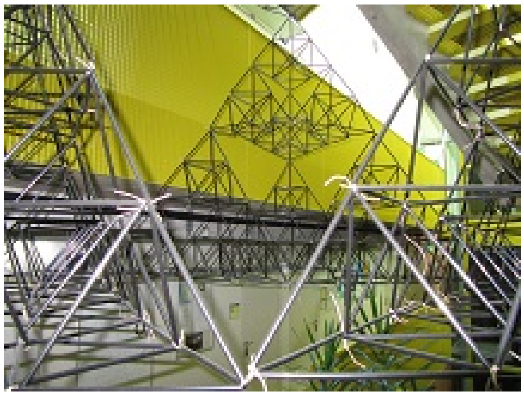
Wichtige Eigenschaften

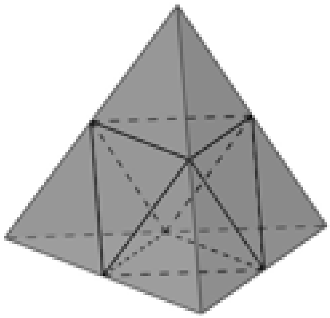
Anders als im zweidimensionalen Raum ist es im dreidimensionalen Raum nicht möglich die Borromäischen Ringe mit Kreisen zu konstruieren, mit nicht kreisförmigen Formen, z.B. Ellipsen, jedoch schon. Die Borromäischen Ringe sind eine Brunnsche Verschlingung, was bedeutet, dass sich die Ringe abwechselnd unter- und überkreuzen.
Herbert Seifert veröfffentlichte 1934 einen Beweis, dass jede Verschlingung eine dazugehörige Seifert-Fläche besitzt, in dem er einen heute nach ihm benannten Algorithmus verwendete, welcher die Fläche eines Knoten berechnet.
Die Seifert-Fläche der Borromäischen Ringe kann auch als 3 Scheiben, verbunden mit gedrehten Bändern dargestellt werden (nach diesem Prinzip wurde das Häkelmodel angefertigt).

Sierpinski-Tetraeder

Beschreibung

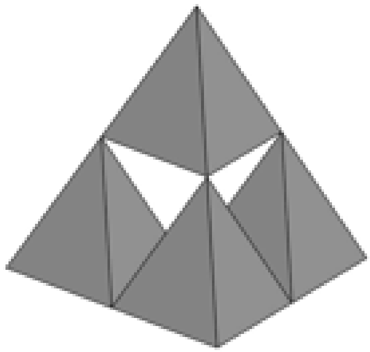
Das Sierpinski-Dreieck wurde im Jahr 1915 von dem polnischen Mathematiker Waclaw Sierpinski erstmals beschrieben. Es gehört zur Gruppe der Fraktale und ist somit eine selbstähnliche Teilmenge eines (üblicherweise) gleichseitigen Dreiecks. Man kann ein derartiges Dreieck iterativ erzeugen. Es gibt eine dreidimensionale Analogie zum Sierpinki-Dreieck, der Sierpinski-Tetraeder, dabei wird statt des Dreiecks ein Tetraeder als Ausgangsfigur verwendet.

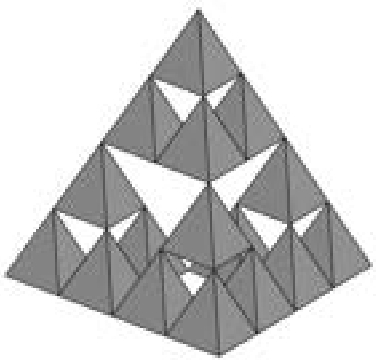




Wichtige Eigenschaften

Um ein Sierpinski-Tetraeder entsprechend zu erzeugen, schneidet man aus der Mitte eines Tetraeders ein Oktaeder mit halber Kantenlänge heraus. Es bleiben wiederum vier kleinere Tetraeder übrig, aus denen wieder je ein Oktaeder entfernt wird. Mit einer zunehmenden Anzahl an Durchführungen der Iterationsschritte werden die wichtigsten Eigenschaften des Sierpinski-Tetraeders sichtbar: das Volumen konvergiert gegen null, die Kantenlänge hingegen gegen unendlich, während sich die Oberfläche an die des Ursprungstetraeders annähert. Dabei ist die Dimension der Figur durch $dim = \frac{\log(4)}{\log(2)} = 2$ gegeben, obwohl man sich in einem dreidimensionalen Raum befindet.
Das obige Foto zeigt ein am Institut für Angewandte Geometrie (JKU) ausgestelltes Modell des Sierpinski-Tetraeders, welches während der „Langen Nacht der Forschung“ (2014) aus 1536 Strohhalmen gebastelt wurde.





Der Soma Würfel

Beschreibung

Der Soma Würfel wurde 1936 von Piet Hein während einer Vorlesung über Quantenmechanik von Werner Heisenberg erfunden. Er dient als Geduldspiel, bei dem ein 3x3x3 Würfel aus sieben einzelnen Teilen zusammen gebaut werden soll. Dabei sind alle Teile unterschiedlich aufgebaut, jedoch sind sie alle aus kleinen, jeweils identischen Würfeln zusammengesetzt. Das Spiel soll räumliches Vorstellungsvermögen und die Fähigkeit der Problemlösung verbessern.

Wichtige Eigenschaften

Erst 1961 konnte berechnet werden, dass es genau 240 verschiedene Lösungsmöglichkeiten für das Grundspiel gibt - bis auf Drehungen und Spiegelungen des Würfels. Bei allen diesen Lösungswegen gibt es nur eine einzige Position für das **T**-Stück. Wie oben bereits erwähnt, bestehen die Einzelteile aus kleineren, identischen Würfel (auch genannt Polywürfel), wobei immer 3 aber nie mehr als 4 zusammengesetzt werden. Daraus ergeben sich genau ein Dreier und sechs Vierer. Bei den Vierern gibt es drei flache (L-, S- und T-förmig) und drei 3D-Formen.

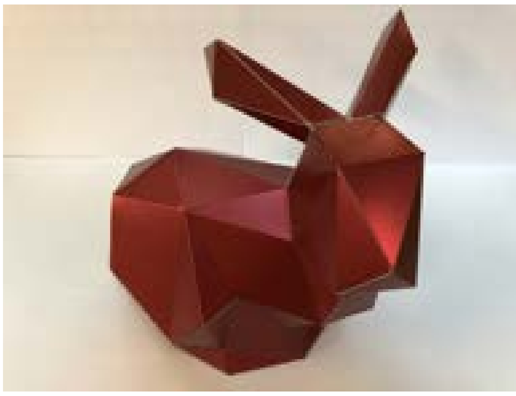
Stanford Bunny

Beschreibung

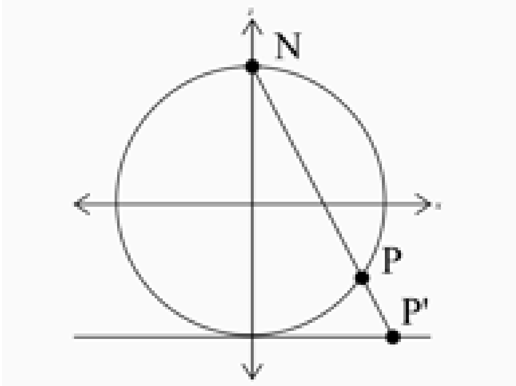
Der Stanford Bunny ist eines der bekanntesten und am meisten verwendeten Objekte der Computergraphik. Es handelt sich um das Modell eines Porzellanhasen, das 1994 an der Stanford University mit Hilfe eines 3D-Scanners angefertigt wurde. In der computerunterstützten Geometrie wird es hauptsächlich als Testmodell für Algorithmen verwendet, die z.B. der Datenkomprimierung, Oberflächenglättung, der Konvertierung in andere Datenstrukturen oder der volumetrischen Parametrisierung dienen.

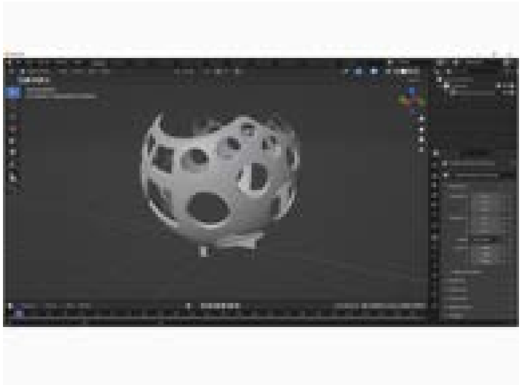
Wichtige Eigenschaften

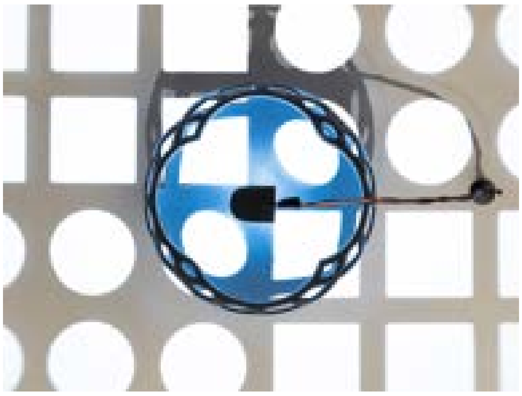
Das Originalmodell besteht aus 69.451 Dreiecken und wurde anhand mehrerer Scans aus verschiedenen Perspektiven erstellt. Es reicht jedoch bereits eine viel kleinere Anzahl an Dreiecken aus, um eine formtreue Nachbildung des Standford Bunnys zu erhalten. So existieren mittlerweile zahlreiche Reproduktionen aus den unterschiedlichsten Materialien und sogar aus Papier lässt sich eine Figur anfertigen, wobei man auch auf einen Bastelbogen zurückgreifen kann. Am Institut für Angewandte Geometrie an der JKU wurde im Jahr 2016 ein Modell aus Legosteinen nachgebaut.



Stereografische Projektion: Visualisierung anhand eines 3D-Drucks







Beschreibung

Eine **Stereografische Projektion** dient der Abbildung einer Kugelfläche auf eine Ebene. Konkret handelt es sich dabei um eine *Zentralprojektion*, also eine Projektion bei der alle Strahlen aus einem gemeinsamen Punkt entspringen. Dieser, genannt Projektionszentrum, liegt auf der Kugeloberfläche, und als Projektionsebene wird eine gegenüberliegende Tangentialebene verwendet.

Wichtige Eigenschaften

Kreistreu: Projektionen von Kreisen auf der Kugel bilden wieder Kreise.
Winkeltreu: Winkel auf der Kugel haben die selbe Größe wie ihre Abbilder in der Projektionsebene.
Nicht isometrisch: Entfernungen bleiben im Allgemeinen nicht erhalten, weshalb andere Formen als Kreise oft stark verzerrt werden.

Das Modell

Gefertigt wurde das Modell mit Hilfe des 3D-Druckverfahrens SLA. Eine LED, verbaut am Nordpol der Kugel, bildet das Projektionszentrum, und zur Visualisierung der o.g. Eigenschaften wurden entsprechende Ausschnitte in das Modell eingefügt. An den Schatten ist gut zu erkennen, dass Kreise und die 90° Winkel erhalten bleiben, während die quadratischen Schatten aus stark verzerrten Ausschnitten hervorgehen.

Das Sterntetraeder

Beschreibung

Papier ist allgegenwärtig. Schon von Kindesbeinen an ist es uns vertraut, ob als Schulheft oder Bastelprojekt. Es eignet sich unter anderem aufgrund seiner Flexibilität für eine Vielfalt an Projekten. Papier ist zudem billig, leicht zu verarbeiten und überall verfügbar. Das Sterntetraeder taucht das erste Mal im Jahre 1509 in Luca Pacioli’s De Divina Proportione auf, wo Leonardo da Vinci es illustriert. Benannt wird es erst 100 Jahre später durch Johannes Kepler im Jahre 1609. Er nennt es **Stella Octangula**. Alternativ wird es auch **Keplerstern** genannt.

Wichtige Eigenschaften

Das Sterntetraeder kann als polyedrische Verbindung oder Sternoktaederverbindung angesehen werden. Als Verbindung betrachtet ist es die einfachste von fünf regulären Polyederverbindungen und die einzige reguläre Verbindung von zwei Tetraedern, die als Vereinigung eines Tetraeders und seines Doppeltetraeders aufgebaut ist. Die acht Eckpunkte des resultierenden Polyeders sind die Eckpunkte eines Würfels. Es handelt sich um einen vielflächigen Körper, der durch Verschmelzung zweier punktsymmetrischer Tetraeder entsteht. Es ist ein achtstrahliger Stern bekannt als Sternkörper zum Oktaeder, auch wenn es sich nicht um einen Sternkörper handelt, da nicht in allen Ecken gleich viele Flächen zusammentreffen.

Das Sterntetraeder

Beschreibung

Papier ist allgegenwärtig. Schon von Kindesbeinen an ist es uns vertraut, ob als Schulheft oder Bastelprojekt. Es eignet sich unter anderem aufgrund seiner Flexibilität für eine Vielfalt an Projekten. Papier ist zudem billig, leicht zu verarbeiten und überall verfügbar. Das Sterntetraeder taucht das erste Mal im Jahre 1509 in Luca Pacioli's De Divina Proportione auf, wo Leonardo da Vinci es illustriert. Benannt wird es erst 100 Jahre später durch Johannes Kepler im Jahre 1609. Er nennt es **Stella Octangula**. Alternativ wird es auch **Keplerstern** genannt.

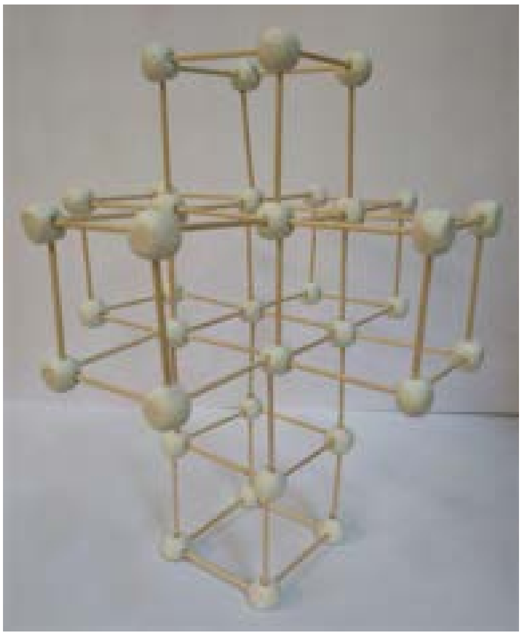
Wichtige Eigenschaften

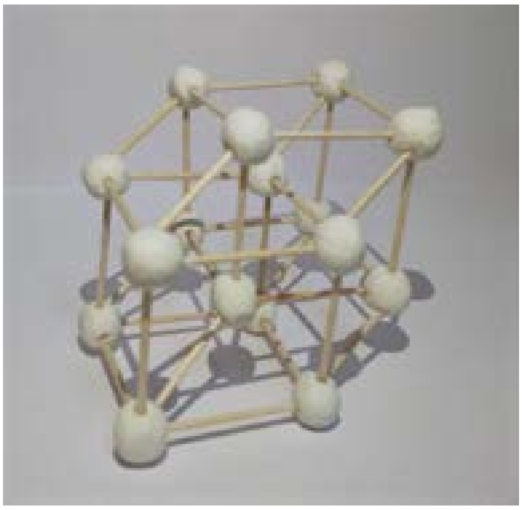
Das Sterntetraeder kann als polyedrische Verbindung oder Sternoktaederverbindung angesehen werden. Als Verbindung betrachtet ist es die einfachste von fünf regulären Polyederverbindungen und die einzige reguläre Verbindung von zwei Tetraedern, die als Vereinigung eines Tetraeders und seines Doppeltetraeders aufgebaut ist. Die acht Eckpunkte des resultierenden Polyeders sind die Eckpunkte eines Würfels. Es handelt sich um einen vielflächigen Körper, der durch Verschmelzung zweier punktsymmetrischer Tetraeder entsteht. Es ist ein achtstrahliger Stern bekannt als Sternkörper zum Oktaeder, auch wenn es sich nicht um einen Sternkörper handelt, da nicht in allen Ecken gleich viele Flächen zusammentreffen.

Tesseract

Beschreibung

Ein Hyperwürfel ist eine n-dimensionale Analogie zu einem Quadrat oder einem einem Würfel. Ein 4D-Hyperwürfel wird als Tesseract bezeichnet. Der Name $\tau\epsilon\sigma\sigma\epsilon\rho\epsilon\varsigma\ \alpha\kappa\tau\iota\mu\epsilon\varsigma$ (tésseres aktínes) stammt aus dem altgriechischen und bedeutet „vier Strahlen“. Das erste Bild zeigt ein 3D-Netz eines Tesseracts, welches durch Aufschneiden und Falten zu erst in die zweite Figur und abschließend in die Figur auf dem untersten Bild umgewandelt werden kann. Insgesamt gibt es 261 Möglichkeiten, das 3D-Netz eines 4D-Hyperwürfels darzustellen.





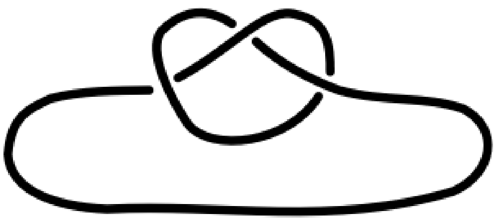
Wichtige Eigenschaften

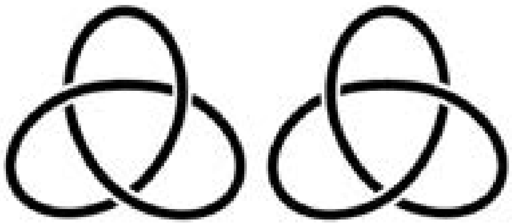
Diese „Würfel in Würfel“-Darstellung ist die einzige Möglichkeit einen Tesseract in 3D mit all seinen Eigenschaften darzustellen: er besitzt 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Flächen und 8 Begrenzungswürfel. Man kann das Volumen und die Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge a folgendermaßen berechnen:
$V = 8 * a^3$ und $A = 24 * a^2$.

Kleeblattknoten

Beschreibung

Der Kleeblattknoten, auch Kleeblattschlinge genannt, ist der einfachste nicht-triviale Knoten und spielt daher eine zentrale Rolle in der Knotentheorie. Ein mathematischer Knoten ist eine geschlossene Kurve im Raum. Ein trivialer Knoten ist eine geschlossene Kurve welche nicht verknotet ist, wie zum Beispiel ein Kreis im Raum. Ein nicht-trivialer Knoten hingegen ist ein Knoten der nicht entknotet werden kann, was in anderen Worten bedeutet, dass er nicht zu einem trivialen Knoten verformt werden kann. Man erhält einen Kleeblattknoten indem man die beiden Enden eines Überhandknotens miteinander verbindet.
Der Kleeblattknoten ist der einzige Knoten mit Kreuzungszahl 3, dabei ist die Kreuzungszahl eines Knotens die minimale Anzahl an Überkreuzungen in der 2 dimensionalen Darstellung des Knotens. Außerdem ist der Kleeblattknoten chiral, das heißt er ist verschieden zu seinem Spiegelbild. Die zwei Varianten werden der rechtshändige und der linkshändige Kleeblattknoten genannt.





Kulturelle Bedeutung

Der Kleeblattknoten ist ein häufiges Motiv in den bildenden Künsten. Zum Beispiel wurde die Triquetra (eine zweidimensionale Darstellung der Kleeblattschlinge) schon vor 5000 Jahren von den amerikanischen Ureinwohnern verwendet. Die Triquetra ist eines der bekanntesten Symbole in der keltischen und germanischen Kultur. Im Bild rechts sieht man ein keltisches Kreuz mit vier Triquetras.

Triangulierte Objekte

Beschreibung

Reale Objekte im dreidimensionalen Raum weisen meist keine einfach nachzubildende Struktur auf. Trotzdem ist es oft von Interesse, ein (Computer-)Modell eines solchen Objekts zu erstellen. Mit dessen Hilfe können dann weitere Berechnungen und Simulationen durchgeführt werden. Für die Erstellung eines solchen Modells wird der nachzubildende Körper durch ebene Flächenstücke angenähert, wobei die ursprüngliche Form beibehalten werden soll. Handelt es sich bei den einzelnen Teilflächen um Dreiecke, so spricht man von einer Triangulierung.

Wichtige Eigenschaften

Für den Fall, dass es sich bei dem aus der Triangulierung resultierenden Objekt um einen konvexen Polyeder handelt (ein konvexer Polyeder erfüllt die Eigenschaft, dass die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des Körpers gänzlich im Polyeder liegt), findet der Eulersche Polyedersatz Anwendung. Dieser beschreibt das Verhältnis der Anzahl von Ecken (E), Kanten (K) und Flächen (F) zueinander und lautet: Die Summe der Anzahl von Ecken und Flächen ist gleich der um zwei erhöhten Anzahl von Kanten – oder kurz in einer Formel ausgedrückt:

$$E + F = K + 2.$$

Insbesondere trifft dies zum Beispiel für die Triangulierung einer Kugel zu.

24-Zeller

Beschreibung

Der 24-Zeller ist ein konvexes regelmäßiges vierdimensionales Polytop, das der Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli Mitte des 19. Jahrhunderts erstmals beschrieb. Es ist auch bekannt als Ikositetrachor, Octaplex, Icosatetrahedroid, Octacube, Hyper-diamond oder Polyoctahedron, das aus oktaedrischen Zellen aufgebaut sind. Ludwig Schläfli bestimmte die 4-dimensionalen Verwandten der platonischen Körper: zum Tetraeder den 5-Zeller (Pentachoron), zum Würfel den 6-Zeller (Tesserakt), zum Oktaeder den 24-Zeller (Ikositetrachor), zum Dodekaeder den 120-Zeller (Hekatonikosachor) und zum Ikosaeder den 600-Zeller (Hexakosichor).

Wichtige Eigenschaften

Der Rand des 24-Zellers besteht aus 24 (regulären) Oktaeder Zellen, von denen sich 6 an jeder Ecke und 3 an jeder Kante treffen. Der Körper enthält neben den 24 Zellen 96 Dreiecksflächen, 96 Kanten und 24 Ecken.
Das vorliegende Modell wurde im Rahmen eines Seminars am Institut für Angewandte Geometrie aus Metall und Fischerseil gebaut.

Vivianisches Fenster

Beschreibung

Das vivianische Fenster ist eine 8-förmige Kurve auf der Kugel, welche nach dem italienischen Mathematiker und Physiker Vincenzo Viviani (1622-1703) benannt ist und von diesem 1692 beschrieben wurde. Man erhält die Kurve als Schnitt der Kugel mit einem Kreiszylinder, welcher den halben Radius besitzt und die Kugel in einem Punkt (dem Doppelpunkt der Kurve) tangential berührt.

Wichtige Eigenschaften

Das vivianische Fenster entsteht als Schnitt der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

mit dem Kreiszylinder

$$x^2 - rx + y^2 = 0$$

und ist damit eine algebraische Kurve vierter Ordnung. Als Differenz entsteht die Gleichung

$$z^2 + rx = r^2$$

welche einen parabolischen Zylinder beschreibt, auf dem die Kurve ebenfalls liegt. Aufgrund des vorhandenen Doppelpunktes besitzt das vivianische Fenster eine Parametrisierung durch rationale Funktionen. Darüber hinaus stellte bereits Viviani fest, dass die Oberfläche der Kugel ohne den Inhalt des vivianischen Fensters den Wert $8r^2$ besitzt und man daher mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat konstruieren kann.